

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ НЕВЕТВЯЩИХСЯ ПРОГРАММ В БАЗИСЕ $\{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1, stop\}$ ¹

Аннотация. Рассматривается задача синтеза асимптотически оптимальных по надежности неветвящихся программ с условной остановкой, реализующих булевы функции, при инверсных неисправностях на выходах операторов в базисе $\{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1, stop\}$. Доказано, что в рассматриваемом базисе все булевы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности программами с условной остановкой, причем для функций x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) эти программы являются абсолютно надежными (не содержат операторов), а для остальных функций эти программы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ (ε – вероятность инверсной неисправности на выходе оператора).

Ключевые слова: булевы функции, неветвящиеся программы, оператор условной остановки, синтез, надежность.

Abstract. We consider the problem of synthesis of optimal on reliability no-branching programs with conditional stop-operator at inverse faults on operator outputs in basis $\{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1, stop\}$. We proved that in this basis it's possible to realize all Boolean functions with asymptotically optimal on reliability programs with conditional stop-operator, and for functions x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) these programs are absolutely reliable (contain no operators), and for remaining functions these programs work with unreliability asymptotically equal ε at $\varepsilon \rightarrow 0$ (ε is a probability of the inverse fault on the operator output).

Keywords: Boolean functions, nobranching programs, conditional stop-operator, synthesis, reliability.

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с условной остановкой [1]. Предполагается, что все операторы – конъюнкторы, дизъюнкторы, инверторы и операторы условной остановки – независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему булеву функцию φ , а в неисправном – функцию $\bar{\varphi}$. В неисправном состоянии оператор условной остановки вместо единицы выдает нуль. Считаем, что программа Pr реализует функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если она реализует ее при отсутствии неисправностей.

Ненадежностью $N(Pr)$ программы Pr назовем максимальную вероятность ошибки на всех выходах программы Pr при всевозможных входных наборах.

Чтобы сформулировать известные результаты для схем из функциональных элементов, которые отличаются от неветвящихся программ наличием оператора условной остановки, введем необходимые определения.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, номера проектов 08-06-00503а, 09-06-28615а/В.

Ненадежностью $N(S)$ схемы S из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на выходах, назовем максимальную вероятность ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах. Обозначим $N_\varepsilon(f) = \inf N(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим булеву функцию $f(\tilde{x})$ ($\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$). Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f , называется асимптотически оптимальной по надежности, если $N(A) \sim N_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N_\varepsilon(f)}{N(A)} = 1.$$

Теорема 1 [2]. При $\varepsilon \in (0, 1/128]$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ можно реализовать такой схемой S , что $N(S) \leq 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$.

Обозначим $K(n)$ – множество булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не представимых в виде $(x_i^a \& h(\tilde{x}))^b$, где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a, b \in \{0, 1\}$.

Теорема 2 [2]. Пусть $\varepsilon \in (0, 1/6]$, а $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K(n)$. Тогда любая схема S , реализующая f , имеет ненадежность $N(S) \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$.

Из теорем 1 и 2 следует, что в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для неветвящихся программ с надежным оператором условной остановки доказана теорема 3 [3].

Теорема 3 [3]. При $\varepsilon \in (0, 1/128]$ любую булеву функцию можно реализовать такой программой Pr_f с надежным оператором условной остановки, что $N(Pr_f) \leq \varepsilon + 41\varepsilon^2$.

Докажем теорему о нижней оценке ненадежности программ с надежным оператором условной остановки.

Теорема 4. При $\varepsilon \in (0, 1/2)$ для любой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не равной x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), и любой программы Pr_f с надежным оператором условной остановки, реализующей функцию f , справедливо неравенство $N(Pr_f) \geq \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная функция, отличная от переменных x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), а Pr_f – любая программа, ее реализующая. Отметим, что любая программа для рассматриваемой функции содержит хотя бы один функциональный оператор. Если в программе Pr_f вход ни одного оператора условной остановки не соединен с выходом никакого функционального оператора (т.е. либо операторов остановки нет, либо все они соединены с полюсами), то хотя бы один из выходов программы является выходом функционального оператора. Поскольку рассматриваемая подпрограмма является схемой из функциональных элементов, для которой известно [4], что вероятность ошибки на выходе не меньше ε , поэтому $N(Pr_f) \geq \varepsilon$. Если же в программе Pr_f имеется хотя бы один оператор условной остановки, вход которого соединен с выходом функционального оператора, то вероятность ошибки на выходе этого оператора остановки равна ε . Поэтому ненадежность программы, которая равна максимальной вероятности ошибки на всех выходах программы Pr_f при всевозможных входных наборах, не меньше ε .

Теорема 4 доказана.

Далее будем считать все операторы условной остановки ненадежными, подверженными инверсным неисправностям на выходе. Для неветвящихся программ с оператором условной остановки, подверженным инверсным неисправностям на выходах, справедливы лемма 1 и теорема 5.

Лемма 1. При $\varepsilon \in (0, 1/128]$ программа Pr_g (рис. 1) реализует функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3)$ с ненадежностью $N(Pr_g) \leq 3\varepsilon$, а вероятности $P_0^I, P_1^I, P_0^{II}, P_1^{II}$ появления нуля и единицы соответственно на каждом из двух выходов I и II приведены в табл. 1.

Таблица 1

Наборы	Выход I		Выход II	
	P_0^I	P_1^I	P_0^{II}	P_1^{II}
(000)	ε^2	$\varepsilon - \varepsilon^2$	$1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4$	$\varepsilon - 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4$
(001), (010), (100)	ε^2	$\varepsilon - \varepsilon^2$	$1 - 3\varepsilon + 5\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4$	$2\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4$
(011)	$\varepsilon - \varepsilon^2$	$(1 - \varepsilon)^2$	$\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4$	$2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4$
(101), (110)	ε^2	$\varepsilon - \varepsilon^2$	$3\varepsilon - 8\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4$	$1 - 4\varepsilon + 8\varepsilon^2 - 7\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4$
(111)	$\varepsilon - \varepsilon^2$	$(1 - \varepsilon)^2$	$3\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4$	$\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4$

Доказательство. Запишем функцию голосования в виде $g(x_1, x_2, x_3) = (x_2 x_3 \vee x_1)(x_2 \vee x_3)$ и представим программу (рис. 1) с оператором условной остановки функциональной схемой (рис. 2).

$g(x_1, x_2, x_3)$:
 1) $z_1 = x_2 \& x_3$
 2) stop (z_1)
 3) $z_2 = x_2 \vee x_3$
 4) $z_3 = x_1 \vee z_1$
 5) $z_4 = z_2 \& z_3$

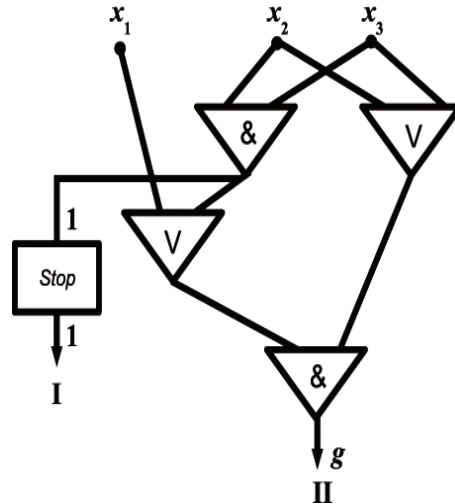


Рис. 1

Рис. 2

Заметим, что оператор остановки срабатывает, когда на его вход поступает единица (при этом в исправном состоянии на выходе оператора тоже единица).

Вычислим и оценим вероятности $P_0^I, P_1^I, P_0^{II}, P_1^{II}$ программы Pr_g на всех входных наборах $\tilde{a}$.

Набор $\tilde{a} = (000)$:

– вероятность P_1^I : $P_1^I(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon(1 - \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2 < \varepsilon$;

– вероятность $P_1^{\text{II}}: P_1^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = (1 - \varepsilon)[(1 - \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon((1 - \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon(1 - \varepsilon))] =$
 $= \varepsilon - 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 < \varepsilon;$

– вероятность $P_0^{\text{I}}: P_0^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2;$

– вероятность $P_0^{\text{II}}: P_0^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon + 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 - \varepsilon^2.$

Наборы $\tilde{a} = (001), (010):$

– вероятность $P_1^{\text{I}}: P_1^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon(1 - \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2 < \varepsilon;$

– вероятность $P_1^{\text{II}}: P_1^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = (1 - \varepsilon)[(1 - \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon(\varepsilon^2 + (1 - \varepsilon)^2)] = 2\varepsilon -$
 $- 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 < 2\varepsilon;$

– вероятность $P_0^{\text{I}}: P_0^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2;$

– вероятность $P_0^{\text{II}}: P_0^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 - \varepsilon^2 = 1 -$
 $- 3\varepsilon + 5\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4.$

Набор $\tilde{a} = (100):$

– вероятность $P_1^{\text{I}}: P_1^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon(1 - \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2 < \varepsilon;$

– вероятность $P_1^{\text{II}}: P_1^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = (1 - \varepsilon)[(1 - \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon(\varepsilon^2 + (1 - \varepsilon)^2)] = 2\varepsilon -$
 $- 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 < 2\varepsilon;$

– вероятность $P_0^{\text{I}}: P_0^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2;$

– вероятность $P_0^{\text{II}}: P_0^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 - \varepsilon^2 = 1 -$
 $- 3\varepsilon + 5\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4.$

Заметим, что на рассмотренных наборах (000), (001), (010), (100) ошибкой будет появление 1, и вероятность ошибки на выходе программы Pr_g будет равна $\max\{P_1^{\text{I}}, P_1^{\text{II}}\}$, который не превосходит 2ε .

Набор $\tilde{a} = (011):$

– вероятность $P_0^{\text{I}}: P_0^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon(1 - \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2 < \varepsilon;$

– вероятность $P_0^{\text{II}}: P_0^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon[(1 - \varepsilon)^2 + \varepsilon(\varepsilon(1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon)\varepsilon)] = \varepsilon -$
 $- 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 < \varepsilon;$

– вероятность $P_1^{\text{I}}: P_1^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = (1 - \varepsilon)^2;$

– вероятность $P_1^{\text{II}}: P_1^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 - 1 + 2\varepsilon -$
 $- \varepsilon^2 = 2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4.$

Наборы $\tilde{a} = (101), (110):$

– вероятность $P_0^{\text{I}}: P_0^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon^2;$

– вероятность $P_0^{\text{II}}: P_0^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = (1 - \varepsilon)[\varepsilon(1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon)(\varepsilon(1 - \varepsilon) + (1 -$
 $- \varepsilon)\varepsilon)] = 3\varepsilon - 8\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 < 3\varepsilon;$

– вероятность $P_1^{\text{I}}: P_1^{\text{I}}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon(1 - \varepsilon);$

– вероятность $P_1^{\text{II}}: P_1^{\text{II}}(Pr_g, \tilde{a}) = 1 - \varepsilon^2 - 3\varepsilon + 8\varepsilon^2 - 7\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 - \varepsilon + \varepsilon^2 = 1 -$
 $- 4\varepsilon + 8\varepsilon^2 - 7\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4.$

Набор $\tilde{a} = (111)$:

– вероятность P_0^I : $P_0^I(Pr_g, \tilde{a}) = (1 - \varepsilon)\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^2 < \varepsilon$;

– вероятность P_0^{II} : $P_0^{II}(Pr_g, \tilde{a}) = \varepsilon[\varepsilon(1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon)(\varepsilon(1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon)\varepsilon)] = 3\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 < 3\varepsilon^2$;

– вероятность P_1^I : $P_1^I(Pr_g, \tilde{a}) = (1 - \varepsilon)^2$;

– вероятность P_1^{II} : $P_1^{II}(Pr_g, \tilde{a}) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 - 1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2 = \varepsilon - 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4$.

Заметим, что на рассмотренных наборах (000), (001), (010), (100) ошибкой будет появление 0, и вероятность ошибки на выходе программы Pr_g будет равна $\max\{P_0^I, P_0^{II}\}$, который не превосходит 3ε .

Лемма 1 доказана.

Теорема 5. При $\varepsilon \in (0, 1/128]$ любую булеву функцию можно реализовать такой программой Pr_f , что $N(Pr_f) \leq \varepsilon + 41\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная булева функция. По теореме 1 ее можно реализовать неветвящейся программой (схемой) S с ненадежностью $N(S) \leq 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$.

Используя эту схему S , построим для f неветвящуюся программу с оператором условной остановки Pr_f (рис. 3) и представим ее схемой (рис. 4). Вычислим и оценим вероятности ошибки для каждого из двух выходов I и II программы Pr_f (рис. 4).

- Pr_f :
- 1) $t_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) (S)$
 - 2) $t_2 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) (S)$
 - 3) $t_3 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) (S)$
 - 4) $z_1 = t_2 \& t_3$
 - 5) $stop(z_1)$
 - 6) $z_2 = t_2 \vee t_3$
 - 7) $z_3 = t_1 \vee z_1$
 - 8) $z_4 = z_2 \& z_3$

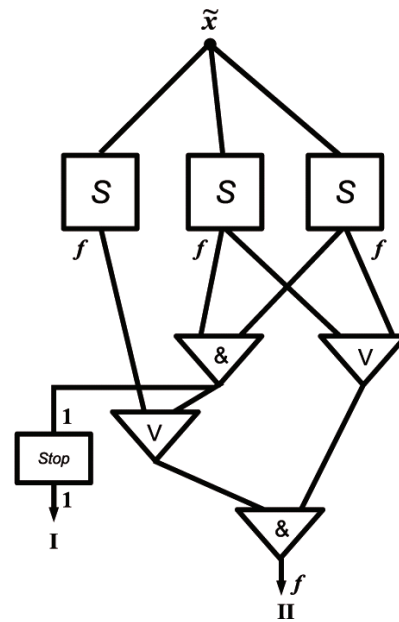


Рис. 3

Рис. 4

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$. Оценим вероятность ошибки на выходе I программы:

$$P_1^I(Pr_f, \tilde{a}) = (1 - p_1)^3 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2) + 3 \cdot (1 - p_1)^2 \cdot p_1 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2) + (1 - p_1) \cdot p_1^2 \cdot (1 - \varepsilon)^2 +$$

$$+ 2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1^2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2) + p_1^3 \cdot (1 - \varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 3\varepsilon p_1 + p_1^2,$$

где $p_1 \leq 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$. Тогда $P_1(Pr_f, \tilde{a}) \leq \varepsilon + 21\varepsilon^2$.

Оценим вероятность ошибки на выходе II программы:

$$\begin{aligned} P_1(Pr_f, \tilde{a}) &= (1 - p_1)^3 \cdot (\varepsilon - 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4) + 3 \cdot (1 - p_1)^2 \cdot p_1 \cdot (2\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4) + \\ &+ (1 - p_1) \cdot p_1^2 \cdot (2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4) + 2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1^2 \cdot (1 - 4\varepsilon + 8\varepsilon^2 - 7\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4) + \\ &+ p_1^3 \cdot (\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4) \leq \varepsilon + 6\varepsilon p_1 + 2p_1^2, \end{aligned}$$

тогда $P_1(Pr_f, \tilde{a}) \leq \varepsilon + 41\varepsilon^2$.

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$. Оценим вероятность ошибки на выходе I программы:

$$\begin{aligned} P_0(Pr_f, \tilde{a}) &= (1 - p_0)^3 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2) + 2 \cdot (1 - p_0)^2 \cdot p_0 \cdot \varepsilon^2 + (1 - p_0)^2 \cdot p_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2) + \\ &+ 3 \cdot (1 - p_0) \cdot p_0^2 \cdot \varepsilon^2 + p_0^3 \cdot \varepsilon^2 \leq \varepsilon + \varepsilon p_0, \end{aligned}$$

где $p_0 \leq 3\varepsilon + 32\varepsilon^2$. Тогда $P_0(Pr_f, \tilde{a}) \leq \varepsilon + 4\varepsilon^2$.

Оценим вероятность ошибки на выходе II программы:

$$\begin{aligned} P_0(Pr_f, \tilde{a}) &= (1 - p_0)^3 \cdot (3\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4) + 2 \cdot (1 - p_0)^2 \cdot p_0 \cdot (3\varepsilon - 8\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4) + \\ &+ (1 - p_0)^2 \cdot p_0 \cdot (\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4) + 3 \cdot (1 - p_0) \cdot p_0^2 \cdot (1 - 3\varepsilon + 5\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4) + \\ &+ p_0^3 \cdot (1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4) \leq 3\varepsilon^2 + 7\varepsilon p_0 + 3p_0^2, \end{aligned}$$

тогда $P_0(Pr_f, \tilde{a}) \leq 53\varepsilon^2$.

Выбирая из полученных для вероятности ошибок значений максимальное, видим, что ненадежность программы $N(Pr_f)$ удовлетворяет неравенству $N(Pr_f) \leq \varepsilon + 41\varepsilon^2$.

Теорема 5 доказана.

Заметим, что функции x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) можно реализовать абсолютно надежно без использования каких-либо операторов. Докажем утверждение о нижней оценке ненадежности программ для других, отличных от x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), функций.

Теорема 6. При $\varepsilon \in (0, 1/2)$ для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не равной x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), и любой программы Pr_f с ненадежным оператором условной остановки, реализующей функцию f , справедливо неравенство $N(Pr_f) \geq \varepsilon(1 - \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная функция, отличная от переменных x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), а Pr_f – любая программа, ее реализующая.

Для каждого из тех операторов программы, выход которых является выходом программы, верно одно из утверждений: он является функциональным оператором либо оператором остановки, на вход которого подается переменная x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), либо оператором остановки, вход которого соединен с выходом некоторого функционального оператора.

В первом случае рассматриваемая подпрограмма является схемой из функциональных элементов, для которой известно [4], что вероятность ошибки на выходе не меньше ε , поэтому $N(Pr_f) \geq \varepsilon$.

Во втором случае вероятность ошибки на выходе также не меньше ε , поэтому $N(Pr_f) \geq \varepsilon$.

В третьем случае вероятность ошибки на выходе функционального оператора равна p , где $p \geq \varepsilon$ [4]. Тогда на выходе оператора остановки вероятность ошибки равна $\max\{p(1 - \varepsilon), \varepsilon(1 - p)\} \geq \varepsilon(1 - \varepsilon)$, поэтому $N(Pr_f) \geq \varepsilon(1 - \varepsilon)$.

Таким образом, ненадежность любой программы не меньше $\varepsilon(1 - \varepsilon)$.

Теорема 6 доказана.

Из теорем 5 и 6 следует, что в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ для всех функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, исключая функции x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), асимптотически оптимальные по надежности программы с ненадежным оператором условной остановки функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Проведенные исследования показывают, что при $\varepsilon \in (0, 1/128]$ все булевы функции в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать программами с ненадежным оператором условной остановки, которые функционируют с ненадежностью не больше $\varepsilon + 41\varepsilon^2$, в то время как ненадежность асимптотически оптимальных схем не превосходит $(3\varepsilon + 32\varepsilon^2)$, т.е. приблизительно в три раза хуже.

Список литературы

1. **Чашкин, А. В.** О среднем времени вычисления значений булевых функций / А. В. Чашкин // Дискретный анализ и исследование операций. – 1997. – Январь–март. – Том 4. – № 1. – С. 60–78.
2. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \bar{\vee} x_2, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 4. – С. 3–17.
3. **Зиновьева, С. М.** Синтез надежных неветвящихся программ с условной остановкой / С. М. Зиновьева // Материалы Седьмой молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (г. Москва, 18–23 мая 2009 г.). – В печати.
4. **Neuman, Von J.** Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components / J. Von Neuman // Automata studies / edited by C. Shannon, Mc. Carthy J. – Princeton University Press, 1956. – (Русский перевод: Автоматы. – М. : ИЛ, 1956. – С. 68–139).

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующая кафедрой
дискретной математики, Пензенский
государственный университет

Alekhina Marina Anatolyevna
Doctor of physico-mathematical sciences,
professor, head of sub-department
of discrete mathematics,
Penza State University

Зиновьева Светлана Михайловна
ассистент, кафедра дискретной
математики, Пензенский
государственный университет

Zinovyeva Svetlana Mikhaylovna
Assistant, sub-department of discrete
mathematics, Penza State University

УДК 514.126

Алехина, М. А.

Синтез асимптотически оптимальных по надежности неветвящихся программ в базисе $\{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1, stop\}$ / М. А. Алехина, С. М. Зиновьева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (10). – С. 60–67.